

ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ РЯДОВ

Джонизаков Улугбек Абдуганиевич

Джизакский политехнический институт, ст.преподаватель

udjonuzoqov @ gmail.com

Буриев Фазлиддин Абдужабборович

Студент Джизакского политехнического института

Аннотация:

При решении практических задач физики и технических наук решение задачи часто сводится к интегрированию «неинтегрируемых» функций. В данной статье описаны методы вычисления определенных интегралов в таких задачах с использованием применения вычисления определенных интегралов рядов при решении задач.

Ключевые слова: интеграл, ряд, задача, переменная величина, гладкая аппроксимация.

Пример 1. Вычислим $e^{0.2}$ с точностью до 0,0001.

Решение: По формуле $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$ имеем:

$$e^{0.2} = 1 + 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2!} + \frac{(0.2)^3}{3!} + \frac{(0.2)^4}{4!} + \dots$$

Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании всех членов, начиная с пятого:

$$\begin{aligned} r_5 &= \frac{(0.2)^4}{4!} + \frac{(0.2)^5}{5!} + \frac{(0.2)^6}{6!} + \dots = \frac{(0.2)^4}{4!} \left(1 + \frac{0.2}{5} + \frac{(0.2)^2}{5 \cdot 6} + \dots \right) < \\ &< \frac{(0.2)^4}{4!} \left(1 + \frac{0.2}{5} + \left(\frac{(0.2)^2}{5^2} + \dots \right) \right) = \frac{0.0016}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0.2}{5}} < 0.0001 \dots \end{aligned}$$

Значит, с точностью до 0.0001 имеем:

$$e^{0.2} = 1 + 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2!} + \frac{(0.2)^3}{3!} = 1 + 0.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{6} \approx 1.2213$$

Пример 2. Вычислим $\cos 10^0 = \cos \frac{\pi}{18}$ с точностью до 0,0001.

Решение: Для вычисления $\cos 10^0 = \cos \frac{\pi}{18}$ запишем ряд

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

при $x = \frac{\pi}{18}$, принадлежащем области сходимости $(-\infty; +\infty)$:

$$\cos \frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!} + \dots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{18^{2n} \cdot (2n)!} + \dots =$$

$$= 1 - 0,015231 + 0,000039 + \dots$$

(необходимо взять два члена, так как при этом погрешность

$$|r_n| < 0,000039 < 0,0001).$$

$$\text{Итак, } \cos 10^\circ = 1 - 0,015231 = 0,984769 \approx 0,9848$$

Метод последовательных приближений. Этот вопрос не относится к теме «Степенные ряды», но рассматривается здесь, чтобы сосредоточить в одном месте различные приложения рядов.

Приближенное решение уравнений вида $x = f(x)$ во многих случаях удается осуществить следующим образом. Выбираем какое-нибудь приближенное значение x_0 корня и подставляем его вместо x в правую часть равенства. Находим значение $x_1 = f(x_0)$. Затем вычисляем $x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$. Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ и функция $f(x)$ непрерывна, то переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$, получаем, что $c = f(c)$, т.е. что c -корень искомого уравнения.

Описанный метод оказывается пригодным лишь при некоторых дополнительных требованиях, предъявляемых к функции $f(x)$.

Определение.1. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a; b]$, называется сжимающей, если

а) образ отрезка $[a; b]$ является подмножеством этого отрезка: $f([a; b]) \subset [a; b]$;

б) существует такое число q , что $0 < q < 1$, и для любых чисел x_1 и x_2 из $[a; b]$ выполняется неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| \leq q|x_2 - x_1|$.

Отметим, что в силу теоремы Лагранжа условие б) выполняется, если функция $f(x)$ дифференцируема на $[a; b]$, причем $\sup_{x \in [a; b]} |f'(x)| < 1$.

В самом деле, в этом случае для любых x_1 и x_2 из $[a; b]$ имеем:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)(x_2 - x_1)| \leq q|x_2 - x_1|, \text{ где } q = \sup_{x \in [a; b]} |f'(x)|$$

Теорема1: Если непрерывная функция $f(x)$ является сжимающей на отрезке $[a; b]$, то на $[a; b]$ существует единственное число c , такое, что $c = f(c)$. Это число является пределом последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, где x_0 -любая точка отрезка $[a; b]$ и $x_{n+1} = f(x_n)$

Пример 3: Решить уравнение $x = 2 + \sqrt[4]{x}$ с точностью до 0,001.

Решение: Здесь $f(x) = 2 + \sqrt[4]{x}$. Так как $f(1) = 2 + \sqrt[4]{1} = 3 > 1$, $f(4) = 2 + \sqrt[4]{4} = 3.4 < 4$ то уравнение имеет корень на отрезке $[1; 4]$. На этом отрезке $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \leq \frac{1}{4} < 1$ и кроме того,

$f([1;4]) \in [1;4]$. Поэтому можно применить метод последовательных приближений. Положим $x_1 = 4$. Тогда $x_2 = f(4) \approx 3.4142$

Продолжая этот процесс, находим, что $x_4 = 3.3538, x_5 = 3.3532$. Абсолютная погрешность δ при замене корня уравнения приближенным значением x_4 равна:

$$\begin{aligned} |(x_5 - x_4) - (x_6 - x_5) + \dots| &\leq |x_5 - x_4| + |x_6 - x_5| + \dots \\ + \dots &\leq |x_5 - x_4|(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{|x_5 - x_4|}{1 - q}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае $\delta_4 = \frac{0,0007}{1 - \frac{1}{4}} < 0.001$.

Итак, с точностью до 0,001 корень уравнения равен 3,353. Других корней уравнение не имеет. В заключение следует сказать, что таких и таких примеров при расчете практических задач немало. Поэтому очень важно изучать методы решения таких задач [1-16].

Использованная литература

1. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2022). ABOUT THE METHODS OF SOLVING PARAMETRIC EQUATIONS. *Journal of Academic Research and Trends in Educational Sciences*, 1(5), 1-7.
2. Abdug'aniyevich, D. U. B. (2022). PARAMETRLI LOGARIFMIK TENGLAMALARNI YECHISH USULLARIGA OID BA'ZI MASALALAR. *PEDAGOGS jurnali*, 5(1), 8-16.
3. Соатов, У. А., & Джанизоков, У. А. (2022). Сложные события и расчет их вероятностей. *Экономика и социум*, (1-2 (92)), 222-227.
4. Soatov, U. A. (2022). Tenglamalarni yechishning grafik usuli haqida. *Science and Education*, 3(8), 7-12.
5. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2023). Using Real World Problems in Developing Students' Mathematical Skills. *Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics*, 14, 10-15.
6. Abdukadirovich, S. U., & Abdug'oniyevech, D. U. B. (2022, November). ABOUT THE METHODS OF SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS AT THE SCHOOL LEVEL. In *E Conference Zone* (pp. 49-56).
7. Soatov, U. A. (2022). Logarifmik funksiya qatnashgan murakkab tenglamalarni yechish usullari haqida. *Science and Education*, 3(9), 16-22.
8. Abdukadirovich, S. U., & Abdug'oniyevech, D. U. B. (2023). GEOMETRIK MASALALARNI YECHISHDA ASOSIY TUSHUNCHALARNI BIRGALIKDA QO'LLASH. *Conferencea*, 45-50.
9. Соатов, У. А., & Джанизоков, У. А. (2023). О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ. *Экономика и социум*, (1-1 (104)), 411-415.
10. Abduganievich, D. U., & Rajabovich, G. R. (2023). PARAMETRIC LINEAR EQUATIONS AND METHODS FOR THEIR SOLUTION. *Open Access Repository*, 4(2), 780-787.
11. Джанизоков, У. А., & Гадаев, Р. Р. (2023). ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ. *Экономика и социум*, (4-1 (107)), 563-567.
12. Muxtorov, S. (2023). FUNKSIYANING MONOTONLIK XOSSALARINING QO'LLANILISHI. *Research and implementation*.

-
13. Soatov, U., Djanizov, U., & Gadayev, R. (2024, March). On the solution of some linear integral equation with partial integrals. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 3045, No. 1). AIP Publishing.
 14. Djanizov, U. A., & Axmatov, J. J. (2024). ELEKTROTEKNIKA MASALALARIDA DIFFERENTIAL TENGLAMALARNING QO'LLANILISHI. *Экономика и социум*, (3-1 (118)), 114-117.
 15. Соатов, У. А. О составлении и методах решения дифференциальных уравнений при решении практических задач / У. А. Соатов, У. А. Джонизаков // Экономика и социум. – 2024. – № 2-2(117). – С. 656-659. – EDN JKGTXU.
 16. Соатов, У. А. О методах решения нелинейных систем уравнений / У. А. Соатов, У. А. Джонизаков // Экономика и социум. – 2024. – № 2-2(117). – С. 660-664. – EDN BAOIRA.