

AKTUAR MATEMATIKANING BA'ZI STOXASTIK MODELLARI

Mahmudova Nilufar Avazjon qizi

Aniq va tabiiy fanlarni o'qitish metodikasi

(matematika) mutaxassisligi 2- kurs magistranti

Annotatsiya

Hayotni sug'urta qilish asosida bir shaxsning sug'urta holati ro'y bergandagi zararlar qaralayotgan paytda bu holat ro'y bermagan katta sondagi sug'urta qatnashchilariga taqsimlash prinsipi yotadi. Hayotdan ko'z yumish paytining noaniqligi hayotni sug'urta qilishda asosiy omil hisoblanadi. Alovida olingan kishining hayotdan ko'z yumishining vaqtga nisbatan biror aniq narsa aytish qiyin. Lekin agar sug'urta qatnashchilari katta bir jinsli odamlar guruhini tashkil etsa, biz bu guruhdagi boshqa odamlar taqdiri bilan qiziqmaymiz, u holda turg'unlik xossasiga ega bo'lgan ommaviy tasodifiy hodisalar haqidagi fan sifatida ehtimollar nazariyasi usullari qo'llaniladi. U holda hayot davomiyligini T tasodifiy miqdor sifatida qarash mumkin.

Kalit so'zlar: sug'urta, ehtimollar nazariyasi, sug'urta holati, hodissa, prinsip

Oldin Life (xayot) sug'urtasiga oid holatlarni qayd etib o'tamiz. Bu sug'urta variantida sug'urta kompaniyasi bir yil davomida sug'urta qilingan mijoz vafot qilsa (kontrakt tuzilgan davrdan boshlab) uning qarindoshlariga b so'm miqdorida sug'urta to'lovi beradi, agar shu davr davomida sug'urta qilingan shaxs vafot etmasa kompaniya hech narsa to'lamaydi. Sug'urta hodisasining ro'y berishi ehtimolligi q bo'lsa, sug'urta to'lovi X ni quyidagicha

$$X = Ib \quad (1)$$

ifoda etish mumkin. Bu yerda I – sug'urta hodisasining indikatori, ya'ni $I=1$ bo'ladi, agar sug'urta risk holati ro'y bersa, $I=0$ bo'ladi, agar sug'urta risk holati ro'y bermasa.

Shunday qilib, X sug'urta to'lovi bo'lib

$$P(X=x) = \begin{cases} 1-q, & \text{agar } x = 0 \text{ bolsa;} \\ q, & \text{agar } x = b \text{ bolsa;} \\ 0, & \text{qolgan hollarda} \end{cases}$$

taqsimotga ega bo'lsa, bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bolsa;} \\ 1-q, & \text{agar } 0 \leq x < b \text{ bolsa;} \\ 1, & \text{agar } x \geq b \text{ bolsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Yuqoridagi (1) formuladan foydalanib

$$EX = bq, \quad EX^2 = b^2q, \quad DX = b^2q(q-1)$$

tengliklarni yozish mumkin.

Aktuar matematikada o'rta qiymat EX , dispersiya DX lardan tashqari, o'rta kvadratik og'ish $\sigma_X = \sqrt{DX}$ va variatsiya koeffisienti

$$C_X = \frac{\sigma_X}{m_X}, m_X = EX$$

xarakteristikalaridan ham ko'p foydalaniadi.

Sug'urta kompaniyasining moliyaviy to'lovlarini tashkil etuvchi asosiy komponentlardan biri- bu individual to'lov hisoblanadi. O'rganilayotgan to'lov holatiga bog'liq holda, individual to'lov deganda, har qanday konkret bitta sug'urta shartnomasi yuzaga keltirgan to'lov tushuniladi. Ko'p hollarda (masalan, hayot sug'urtasida) shartnomaga faqat bitta to'lovga olib keladi, boshqa hollarda esa (masalan, avtomobil sug'urtasida) bitta shartnomaga o'zining harakat davri davomida bir nechta to'lov larga olib kelishi mumkin (masalan, takroriy avtohalokatlar ro'y berishi mumkin). Risk nazariyasi chegarasida faqat X individual to'loving qandaydir pul birliklari bilan o'lchanadigan qiymatlari qiziqtiradi xolos.

Bu to'lov miqdori X ni tasodifiy miqdor deb tushunish tabiiy va $P(X = 0) > 0$ (agar sug'urta holati ro'y bermasa, hech qanday to'lov yuzaga kelmaydi) bo'lgani uchun X diskret tipdagi tasodifiy miqdor bo'ladi.

Sug'urta sistemasining sodda sxemalarida individual to'lov X tasodifiy miqdor chekli sondagi $b_0 = 0, b_1, \dots, b_n$ qiymatlarni qabul qiladi va uning taqsimoti

X	b_0	b_1	...	b_n
P	p_0	p_1	...	p_n

$P(X = b_k) = p_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$ jadval bilan ifoda etiladi. Bu yerda

Misol sifatida bir yil muddatga tuzilgan hayot sug'urtasini ko'raylik. Bu sxemada mijoz sug'urta kompaniyasiga ma'lum miqdordagi summani sug'urta (premiyasi) badali sifatida to'laydi (bu summa aktuar matematikada "mukofot" deb ataladi). Sug'urta kompaniyasi o'z navbatida sug'urta qilingan shaxs bir yil davomida vafot etsa, uning qarindoshlariga b so'm to'lash majburiyatini oladi (sug'urta etilgan shaxs yil oxirigacha yashasa xech narsa to'lamaydi). Keltirilgan sug'urta sxemasida individual to'lov X uchun

$$P(X = 0) = p, P(X = b) = q = 1 - p, 0 \leq p \leq 1$$

q ni shaxsning bir yil davomida vafot etish ehtimolligi deb tushunish mumkin. O'z-o'zidan ma'lumki, bu ehtimollik shaxsning sug'urta qilinayotgan vaqtdagi yoshi x ga bog'liq va uni aktuar

matematikada q_x deb belgilanadi va uning qiymatlari to'plamini "umr davomligi" jadvali deyiladi. Demak, sug'urta shartnomasi tuzilayotganda, bu jadvaldan informatsiya (axborot) manbai sifatida foydalaniadi. Bundan tashqari, mazkur davlatdagi demografik jarayonlarni o'rganish uchun ham bu davlat uchun alohida "umr davomligi" jadvallari tuziladi.

Ayniqsa, o'lim sabablarini hisobga oluvchi sug'urta shartnomalari murakkabroq ko'rinishga ega bo'ladi. Sodda hollarda bunday shartnomalarning ma'nosi quyidagicha: Shaxs sug'urta kompaniyasiga ma'lum miqdordagi pulni to'laydi, sug'urta kompaniyasi esa, sug'urtalangan shaxs baxtsiz hodisa (masalan, avtomobil halokati) natijasida halok bo'lsa, b_1 so'm, agat uning bir yil davomidagi vafoti "tabiiy (ya'ni

hech qanday baxtsiz hodisalar bilan bog'liq bo'lmasa, b_2 so'm to'laydi. Odatda $b_1 > b_2$ deb hisoblanadi. Keltirilgan sug'urta varianti uchun to'lov

$$X = \begin{cases} b_0, \text{ehtimolligi } p, \\ b_1, \text{ehtimolligi } q^{(1)}, \\ b_2, \text{ehtimolligi } q^{(2)}; \end{cases}$$

tasodifiy miqdor bo'ladi. Agar sug'urtalangan shaxsning yoshi shartnoma buzilgan vaqtida x bo'lsa, $q^{(1)}$ va $q^{(1)}$ ehtimolliklar oldin kiritilgan q_x ehtimollik bilan $q_x = q^{(1)} + q^{(2)}$ munosabatda bo'lishi o'z-o'zidan ko'rindi.

Empirik ma'lumotlarning analizi namoyon etadiki, bir yil davomida "o'lim" hodisasi ro'y berishi ehtimolligi q_x , shaxsning yoshi x bilan bog'liqligi

$$q_x = A + Be^{\alpha x} \quad (\text{Meykxam modeli})$$

funksiya bilan ifodalanadi. Bu yerda q_0 shiluvchi A shaxsning yoshiga bog'liq bo'lmaydigan, uning baxtsiz hodisalar natijasidagi vafotiga mos keladi, $Be^{\alpha x}$ q_0 shiluvchi esa shaxsning yoshini uning o'limiga ta'sirini hisobga olgan holda, "tabiiy vafot" ro'y berishiga mos keladi. Aniq o'tkazilgan analiz baxtsiz hodisalar natijasida ro'y beradigan voqealar bilan shaxsning yoshi orasida ma'lum bog'liqlik mavjudligini tasdiq etadi, keltirilgan Meykxam modelida birinchi yaqinlashishda

$$q^{(1)} = A, q^{(2)} = Be^{\alpha x}$$

deb hisoblash mumkin bo'ladi.

q_0 shiluvchi A shaxsning yoshi x ga bog'liq emas, shuning uchun ham uni baxtsiz hodisalar natijasida yuzaga kelgan o'limlarga mos keladi, $Be^{\alpha x}$ q_0 shiluvchi esa shaxsning o'limi uning yoshiga bog'liq bo'lishini ifoda etadi va shu ma'noda "tabiiy o'lim" holatlariga mos keladi.

Tatbiqiy masalalarda individual to'lov X ning sonli xarakteristikalari muhim rol o'yndaydi. Bular qatoriga o'rta qiymat $m_X = EX$, dispersiya $VarX = EX^2 - (EX)^2$, o'rta kvadratik og'ish

$$s_X = \sqrt{VarX}, \text{ variatsiya koeffisienti } C_X = \frac{s_X}{m_X} \text{ va boshqalar kiradi.}$$

Diskret tasodifiy miqdor X ning taqsimoti

$$p_0 = P(X = b_0), \dots, p_n = P(X = b_n)$$

bo'lsa, ehtimolliklar nazariyasining umumiylariga asosan

$$EX = \sum_{k=0}^n b_k p_k, \quad (1)$$

$$EX^2 = \sum_{k=0}^n b_k^2 p_k \quad (2)$$

Yuqorida keltirilgan bir yilga tuziladigan sodda hayot sug'urtasi uchun

$$EX = 0 \Psi_0 + b \Psi_1 = b \Psi_1, \quad (3)$$

$$EX^2 = 0^2 \Psi_0 + b^2 \Psi_1 = b^2 \Psi_1, \quad (4)$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = b^2 q - (bq)^2 = b^2 pq. \quad (5)$$

Mashq sifatida quyidagi misollarni ko'ramiz.

Misol 1. Bir yil muddatga tuziladigan sodda hayot sug'urtasi modelida, shaxsning bir yil davomida vafot etish ehtimolligi $q = 0,0025$, sug'urta to'lovi $b = 100000$ so'm. Individual to'lov X ning o'rta qiymati va dispersiyasi topilsin.

Yuqoridagi (1) formula bo'yicha

$$m_X = EX = b \Psi_1 = 10^5 \Psi 25 \Psi 10^{-4} = 250 \text{ so'm.}$$

Formula (2) ga asosan

$$VarX = b_2 \Psi_0 \Psi_1 = 10^{10} (1 - 25 \Psi 10^{-4}) \Psi 25 \Psi 10^{-4} = 25 \Psi 10^6$$

Shunday qilib, o'rta kvadratik og'ish

$$s_X = \sqrt{VarX} = 5000 \text{ so'm.}$$

Variatsiya koeffisienti

$$C_X = \frac{s_X}{m_X} = \frac{5000}{250} = 20$$

Misol 2. Bir yilga tuziladigan va sug'urta to'lovi o'lim xolatining turiga bog'liq bo'lgan hayot sug'urtasi uchun m_X va $VarX$ topilsin. Bunda "tabiiy sabablarga" bog'liq bo'lgan sug'urta to'lovi $b_2 = 100000$ so'm, baxtsiz hodisalar bilan bog'liq sug'urta to'lovi $b_1 = 500000$ so'm. Baxtsiz hodisa tufayli o'limning ehtimolligi $q^{(1)} = 0,005$, va bir yil davomida "tabiiy sabablar" tufayli ro'y beradigan o'lim ehtimolligi $q^{(2)} = 0,02$.

Yechish. (1) formulaga asosan $m_X = EX = b_1 \Psi_1^{(1)} + b_2 \Psi_1^{(2)} = 450$ so'm.

(2) formulaga asosan esa $VarX = 145 \Psi 10^6$. Bu holda o'rta kvadratik og'ish

$$s_X = \sqrt{VarX} = 12042, \text{ variatsiya koeffisienti } C_X = \frac{s_X}{m_X} = 16,76$$

3.2. Sug'urta to'lovlarining strukturalangan modellari

Aktuar matematikada sug'urta to'lovni ifoda etuvchi tasodifiy miqdor X ni ma'lum ma'noda strukturalash qabul qilingan. Masalan, yuqorida ko'rilgan hayot sug'urtasining eng sodda variantida tasodifiy miqdor X ni

$$X = IY \quad (1)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bunda tasodifiy miqdor

$$I = \begin{cases} 1, & \text{agar sug'urta hodisasi ro'y bersa,} \\ 0, & \text{agar sug'urta hodisasi ro'y bermasa,} \end{cases}$$

Y tasodifiy miqdor esa, sug'urta hodisasi ro'y berganda talab qilingan sug'urta to'lovining miqdorini anglatadi.

Tushunarlik,

$$I = \begin{cases} 1, & \text{agar } X > 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } X = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

ya'ni $I = I(X > 0)$ - tasodifiy hodisa $\{X > 0\}$ ni indikatori. Aytib o'tilganlardan kelib chiqadiki, tasodifiy miqdor I ni taqsimoti, sug'urta to'lovi taqsimoti orqali quyidagi formulalar bilan aniqlanishi mumkin:

$$P(I = 0) = P(X = 0) = p_0, \quad P(I = 1) = P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - p_0.$$

Tasodifiy miqdor Y ning taqsimoti esa, X sug'urta to'lovini, $X > 0$ shartiga nisbatan shartli taqsimoti bo'ladi, yoki bo'lmasa

$$\begin{aligned} P(Y = b_i) &= P(Y = b_i | X > 0) = \frac{P(Y = b_i, X > 0)}{P(X > 0)} = \\ &= \frac{P(Y = b_i)}{P(X > 0)} = \frac{p_i}{1 - p_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Aksincha, I va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari ma'lum bo'lsa, X individual to'lov taqsimotini aniqlash mumkin. Bunda, eng avvalo, $P(X = 0) = P(I = 0)$ ekanligini e'tirof etamiz. So'ng esa, $b_i > 0$ bo'lganda quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$\begin{aligned} P(X = b_i) &= P(IY = b_i) = P(IY = b_i | (I = 1))P(I = 1) + \\ &\quad + P(IY = b_i | (I = 0))P(I = 0) = P(Y = b_i | (I = 1))P(I = 1) \end{aligned}$$

Oxirgida to'la ehtimollik formulasidan va $P(Y = b_i, I = 0) = 0$ ekanligidan foydalanildi.

Tushunarlik, haqiqiy Y iskning taqsimotini, $(I = 1)$ bo'lgandagina o'rGANISH ma'noga ega xolos.

Shuning uchun ham quyidagi mulohazalarda bu shart $(ya^ni, I = 1)$ tushurib qoldiriladi. Aytilganlardan kelib chiqadiki,

$$P(X = b_i) = P(Y = b_i) \Psi^P(I = 1)$$

Demak, individual to'loving keltirilgan ikkita izohlari bir-biriga teng kuchli bo'ladi. Mashq uchun quyidagi konkret misollarni ko'ramiz.

Misol 1. Sug'urta badali (to'lovi) $b = 100000$ va sug'urta qilingan shaxsning bir yil davomida vafot etish ehtimolligi $q = 0,0025$ bo'lgan sug'urta shartnomasini ko'ramiz. Bu shartnomaga uchun I va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari topilsin.

Yechish. Tasodifiy miqdor I mumkin bo'lgan 0 va 1 qiymatlarni quyidagi ehtimolliklar bilan qabul qiladi:

$$P(I = 1) = P(X > 0) = q = 0,0025,$$

$$P(I = 0) = P(X = 0) = 1 - P(X > 0) = 1 - q = 0,9975$$

$$P(Y = b) = P(Y = 100000) = 1$$

Tasodifiy miqdor Y esa o'zgarmas son, ya'ni

Misol 2. Bir yilga tuzilgan va sug'urta to'lovlar, o'lim baxtsiz hodisa natijasida ro'y beradigan bo'lsa $b_1 = 500000$ (bu hodisaning ro'y berish ehtimolligi $q^{(1)} = 0,0005$), agar o'lim "tabiiy sabablar" bilan bog'liq bo'lganda $b_2 = 100000$ (bu hodisaning ro'y berish ehtimolligi $q^{(2)} = 0,0020$ deb qabul qilinadi) miqdorlardan iborat bo'lgan sug'urta shartnomasi o'r ganiladi. Bu shartnomaga uchun I va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari topilsin.

Yechish. Tasodifiy miqdor I mumkin bo'lgan 0 va 1 qiymatlarni quyidagi ehtimolliklar bilan qabul qiladi:

$$P(I = 1) = P(X > 0) = q^{(1)} + q^{(2)} = 0,0025$$

$$P(I = 0) = P(X = 0) = 1 - P(I = 1) = 0,9925$$

Tasodifiy miqdor Y ikkita $b_1 = 500000$ va $b_2 = 100000$ qiymatlarni

$$P(Y = 500000) = P(X = 500000 | X > 0) = \frac{P(X = 500000)}{P(X > 0)} = \frac{0,0005}{0,0025} = 0,2$$

$$P(Y = 100000) = P(X = 100000 | X > 0) = \frac{P(X = 100000)}{P(X > 0)} = \frac{0,0020}{0,0025} = 0,8$$

ehtimolliklar bilan qabul qiladi.

Ba'zida sug'urta variantlarida bitta shartnomaga bir nechta isk xolatlarini yuzaga keltirishi mumkin (masalan, avtomobil sug'urta qilinganda). Bu hollarda tasodifiy miqdor (isk) X ni

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (2)$$

yig'indi ko'rinishida yozish mumkin. Bunda tasodifiy miqdor n , shartnoma muddati davomida yuzaga kelgan isklar sonini, Y_1, Y_2, \dots tasodifiy miqdorlar esa haqiqiy ravishda ro'y bergan isk miqdorlarini belgilaydi.

Qayd qilib o'tamizki, hayot sug'urtasining (1) modeli, sug'urta iski X formula (2) bilan aniqlanadigan modelning xususiy holi bo'ladi. Bunga ishonish uchun (2) da $P(n=1) = 1$ deb hisoblash kifoya bo'ladi.

Odatda (2) modelda qo'shiluvchilar soni tasodifiy miqdor n bevosita qo'shiluvchi Y_i larning hech biriga bog'liq emas deb, ya'ni

$$n, Y_1, Y_2, \dots$$

bog'liq bo'lмаган tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lishligi faraz qilinadi. Bunga qaramasdan (2) modelning aniqroq analizi ko'rsatadiki, ba'zi hollarda sharxlab o'tilgan bog'liqsizlik sharti bajarilmaydi. Masalan, ta'mirlangan avtomobilning buzilish ehtimolligi va uning natijasida yuzaga keladigan xarajatlar ko'proq bo'lshi mumkin.

Individual X iskni (1) va (2) formulalar bilan aniqlash, har xil faktorlarning unga (X ga) bo'lgan ta'sirini miqdoriy jihatdan o'rganish qulay ekanligi bilan ajralib turadi, chunki I va n tasodifiy miqdorlar orqali ifodalangan sug'urta hodisalarini qaytarilishiga va Y_i tasodifiy miqdorlar xarakterlaydigan haqiqiy iskga esa, boshqa va boshqa faktorlar ta'sir etishi mumkin. Aytib o'tilganlarga asoslanib, (1) va (2) formulalarni, to'lov X ning struklashtirilgan (yo'naltirilgan) variantlari deb hisoblash mumkin.

Masalan, avtomobilni yo'l-transport halokatlari natijasida ro'y beradigan harakatlardan sug'urtalashni o'rganaylik. Tushunarlik, yo'l-transport halokatlari yuzaga kelishi hodisalaning ehtimolliklari birinchi navbatda, sug'urta etilgan shaxsning yoshiga bog'liq. Bu ehtimolliklar yosh haydovchilar (ortiqcha "epchillik" va "o'ziga ishonish" tufayli) va keksa yoshdagagi kishilar uchun (yo'l hodisasi va holatlariga reaksiya kamaygani tufayli) kattaroq bo'ladi. Lekin, yo'l-transport halokatlari yuzaga keltirgan harajatlar hech qanday ravishda shaxsning yoshiga bog'liq bo'lmaydi (u avtomobil rusumiga (markasiga) ko'proq bog'liq bo'ladi).

Endi (2) formula orqali struklashtirilgan X sug'urta to'lovi uchun foydali bo'lgan quyidagi moment formulalarini keltiramiz:

$$\begin{aligned} EX &= E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \sum_{n=1}^{\Gamma} P(n=n)E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n | n=n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\Gamma} nP(n=n)\Psi EY = E n \Psi EY \end{aligned} \quad (3)$$

Xususan (1) model uchun moment

$$\begin{aligned}
 EX^2 &= E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} P(n = n)E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)^2 = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P(n = n)\left(E(Y_1^2 + \dots + Y_n^2 + 2(Y_1 Y_2 + \dots + Y_{n-1} Y_n))\right) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P(n = n)\left[nEY^2 + 2 \frac{n(n-1)}{2} EY EY\right] = \\
 &= E n EY^2 + E n(n-1)(EY)^2
 \end{aligned}$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Bauers N., Gerber X., Djons D., Nesbitt S., Xikman Dj.. Aktuarnaya matematika, M: YAnus-K, 2001.
2. Bland D. Straxovanie: prinsipy i praktika (per. s angl.-M., Finansy i statistika, 1998.
3. Ventsel E. S. Teoriya veroyatnostey. - M.: KNORUS, 2010.
4. Voronina N.L. Anglo-russkiy slovar straxovuyx terminov / N.L.Voronina, L.A.Voronin. - M.: IRTISS, 2001
5. Gerber X. Matematika straxovaniya jizni – M.: Mir, 1995.
6. Golubin A.YU. Matematicheskie modeli v teorii straxovaniya: postroenie i optimizatsiya – M.: Ankil, 2003.
7. Kasimov YU.F. Vvedenie v aktuarnyyu matematiku (straxovanie jizni i pensionnyx sxem). - M.: Ankil, 2001.
8. Kornilov, I.A. Osnovy straxovoy matematiki : ucheb. posobie / I.A. Kornilov . - M. : YUNITI-DANA, 2012 .— <http://rucont.ru/efd/188763>
9. Kuznetsova N.L., Sapojnikova A.V. Aktuarnaya matematika: Uchebnoe posobie. Tyumen: Izdatelstvo Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2010. 180s.
10. Mironkina YU.N. Aktuarnye raschyoty. Uchebnik i praktikum dlya bakalavriata i magistratury / YU.N Mironkina, N.V.Zvezdina, M.A.Skorik, L.V. Ivanova. - M.:Izdatelstvo YUrayt , 2015.