YUQORI DARAJALI TENGLAMALARNI HISOBLASHNING BA'ZI USULLARINING TAHLILI

Taymanova E. L.
CHDPU, "Algebra va matematik analiz" kafedrasi oʻqituvchisi

Qurbonqulova S. B.
CHDPU,1-bosqich talabasi.

Annotatsiya:
Barchamizga ma'lumki, oʻquvchilar yuqori darajali tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechishda koʻplab muammolarga duch keladi. Bu muammolarga yechim topish uchun tenglamalarni yechishda bir qancha usullardan foydalanishimiz mumkin. Masalan, Gorner sxemasi, Ferrari usuli, Kardano usuli va boshqalar. Bu maqolada yuqori darajali tenglamalarni yechish usullari tahlil qilingan.

Kalit soʻzlar: gorner sxemasi, Ferrari usuli, Kardano usuli, ko'phad, tenglama, qoldiq.

Аннотация:
Как известно, учащиеся сталкиваются со многими проблемами при решении уравнений и систем уравнений высокого уровня. Для решения этих задач мы можем использовать несколько методов решения уравнений. Например, "Горнер," "Феррари," "Кардано" и другие. В этой статье проанализированы методы решения уравнений высшей степени.

Ключевые слова: схема Горнера, метод Феррари, метод Кардано, многочлен, уравнение, остаток.

Abstract:
We all know that students face many problems when solving high-order equations and systems of equations. To solve these problems, we can use several methods to solve the equations. For example, "Gorner," "Ferrari," "Cardano" and others. This article analyzes methods for solving high-order equations.

Key words: Horner diagram, Ferrari method, Cardano method, polynomial, equation, residue.

Gorner sxemasi usuli. Gorner sxemasi yuqori darajali tenglamalarni yechishda keng qoʻllanadigan usullardan biri boʻlib, William George Horner sharafiga " Gorner sxemasi " deb nomlangan. Bunday nomlanishga qaramasdan, bu usul koʻp yillar oldin ham mavjud boʻlgan. Ya'ni, William Horner bu usulni Joseph-Louis Lagranjga bogʻlangan holda kashf qilgan.
$f(x)$ koʻphad $x-a$ koʻphadga qoldiqli boʻlinishi uchun $f(x)=(x-a)\cdot p(x)+r$ tenglik bajariladi. $f(x)$ koʻphad uchun $f(a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi a soni $f(x)$ koʻphadning ildizi deyiladi.
Gorner sxemasi, asosan, matematikada va fizika bo'yicha hisob-kitoblarni soddalashtirish uchun qo'llaniladi. Bu sxema o'zaro bog'langan funksiyalarning qiymatlarini hisoblashda samarali usul hisoblanadi. Gorner sxemasi yuqori darajadagi ko'phadlarning qiymatini tez va sodda hisoblashda;

Elektron hisoblash moslamalarida matematik funksiyalar va raqamlar bilan ishlashda; Vektor va matritsalar bilan ishlashni soddalashtirishda; Diferensial tenglamalar: Gorner sxemasi, ayniqsa, matematik modellar orqali hal qilinadigan diferensial tenglamalar bilan ishlashda keng qo'llaniladi.
Bu usulning afzalliklari shundaki, Gorner sxemasi an'anaviy usullarga qaraganda tezroq hisoblash imkonini beradi, hisoblash jarayonini soddalashtiradi va kam o'zgaruvchilarga ega bo'lgan qiymatlarni hisoblashga keltiriladi.
f(x) koʻphadning ildizini topish, uning chiziqli boʻluvchilarini topish bilan teng kuchlidir. f(x) koʻphadni x − a chiziqli koʻphadga boʻlishda Gorner sxemasi usulidan foydalanishni koʻrsatamiz.

Misol. $f(x)=9x^5-9x^3+7x+8$ koʻphadni x+2 ga boʻlgandagi p(x) boʻlinmani r qoldiqni Gorner sxemasi orqali topamiz.

$a=b, b_k=ab_{k-1}+a_k, 1\le k\le n-1, r=ab_{n-1}+a_n$ bu tengliklardan r qoldiq yoki f(x) koʻphadning x=a dagi qiymati kelib chiqadi.
Bu usul Gorner sxemasi deb atalib, quyidagi jadval orqali ifodalanadi.

A	**a_0**	**a_1**	**a_2**	**a_3**	**a_4**	**a_5**
	9	0	-9	0	7	8
-2	9	-18	27	-54	115	-222
B	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	r

Shunday qilib, bo'linma $p(x)=9x^4-18x^3+27x^2-54x+115$, qoldiq esa r=f(-2)=-222 ga tengligi kelib chiqadi.

Kardano usuli. Bu metod Xristafor Kardano tomonidan XVI asrda uchinchi darajali tenglamalarni yechish uchun ishlab chiqarilgan. U bu usulni matematik tarkibiy yechim sifatida kashf etgan. Keyinchalik bu usulni boshqa matematiklar rivojlantirishgan va murakkab tenglamalar uchun ham qoʻllashgan.
Kardano usuli, yoki Kardano algoritmi, matematik hisoblarda, ayniqsa, chiziqli algebrada 3-darajali tenglamalarni yechish usuli sifatida ishlatiladi. Ushbu usul, asosan, bir yoki bir nechta o'zgaruvchilar bilan bog'liq bo'lgan tenglamalarni yechishda qo'llaniladi.
Kardano usuli murakkab va yuqori darajali algebraik tenglamalarni yechish uchun qo'llaniladi. Masalan, kubik tenglamani yechishda juda samarali usuldir. Algoritmlarni va ma'lumotlarni tahlil qilishda ham Kardano usulidan foydalaniladi.
Kardano usuli chiziqli algebra kursida uchinchi darajali tenglamani quyidagi umumiy shaklda yechishga qaratilgan: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (1)
Kardano usulida uchinchi darajali tenglamani yechishning asosiy qismi tenglamani soddalashtirish uchun oʻzgarish kiritishdir. Aniqroq qilib aytganda, maqsad ikkinchi darajali hadni yoʻq qilish, chunki bu tenglamani yechishni osonlashtiradi. (1) tenglamani soddalashtirish uchun ikkinchi darajali hadni

yo'q qilish zarur. Buning uchun yangi o'zgaruvchi kiritiladi. Yangi o'zgaruvchi sifatida olamiz va quyidagi natijaga erishamiz. (a = 1)

$$\left(y-\frac{b}{3}\right)^3+b\left(y-\frac{b}{3}\right)^2+c\left(y-\frac{b}{3}\right)+d=0$$

Bu tenglamani soddalashtirsak: $y+\left(c-\frac{b^2}{3}\right)y+\left(d-\frac{bc}{3}+\frac{2b^3}{27}\right)=0.$

Endi, $p=c-\frac{b^2}{3}$, $q=d-\frac{bc}{3}+\frac{2}{27}b^3$ deb belgilash kiritsak tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$y^3+py+q=0$

Demak, uchinchi darajali tenglamani yechish masalasi yuqoridagi tenglamani yechishga keltirildi. Bu tenglamad $y = u + v$ deb olsak, $u^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$. Agar $u + v + q = 0$ va $3uv + p = 0$ bo'lsa, u holda $y = u + v$ soni $y^3 + py + q = 0$ tenglamaning yechimi bo'ladi. Shunday qilib, biz quyidagi sistemaga ega bo'lamiz: $\begin{cases} U^3+V^3=-q \\ 3UV=-p \end{cases}$

Ushbu sistemani yechish uchun ikkinchi tenglikni kubga ko'tarsak, $U^3V^3=-\frac{p^3}{27}$ Bundan esa, U^3 va V^3 sonlarini quyidagi kvadrat tenglamaning ildizlari sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi: $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$

bu yerdan, $U^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, $V^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ tengliklarga ega bo'lamiz. Demak , y uchun quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Ushbu ifodaga Kardano formulasi deyiladi.

Har bir sonning uchta kubik kompleks ildizi mavjudligidan ikkala ildiz uchun jami to'qqizta kombinatsiya kelib chiqadi, ya'ni y ning qiymati to'qqiz xil aniqlanadi. Lekin, ulardan faqatgina $UV=-\frac{p}{2}$ shartni qanoatlantiruvchilarigina tenglamaning ildizi bo'la oladi.

U_1 va V_1 izlanayotgan juftliklardan biri deb qaraylik.

Qolgan U ga mos qiymatlar U_1R_1 va U_1R_1 bo'lib, V ga esa V_1R_1 va V_1R_1 qiymatlar mos keladi. Bu yerda $R_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $R_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, ya'ni 1 ning boshlang'ich kub ildizlari.

Demak, Kardano formulasi orqali tenglamaning barcha

$y_1=U_1+V_1$,

$y_2=U_1R_1+V_1R_2$,

$$y_3=U_1R_2+V_1R_1$$

ildizlarini aniqlay olamiz.

Misol. $x^3-6x+4=0 \quad p=-6,\ q=-4$

$$z^2+4z+8=0$$

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=4-8=-4$$

$$z_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}\ ,\quad z_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}$$

$$z_1=-2+2i,\qquad z_2=-2-2i$$

$$U=\sqrt[3]{-2+2i},\ V=\sqrt[3]{-2-2i}$$

$$r=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2} \qquad \varphi=tg^{-1}(-1)=\frac{3\pi}{4}$$

$$U=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}i\right) \qquad \text{k=0,1,2}$$

$$V=-\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}i\right) \qquad \text{k=0,1,2}$$

$$U_1=1+i \qquad V_1=1-i$$

$$U_2=-\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}i \qquad V_2=-\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}i$$

$$U_3=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}i \qquad V_3=-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}-\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}i$$

$$x_1=U+V=2$$

$$x_{2,3}=-\frac{1}{2}(U+V)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(U-V)$$

$$x_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}$$

Kardano usuli, o'zining samaradorligi bilan tanilgan bo'lsa-da, ba'zi kamchiliklarga ham ega. Bu usul juda ko'p bosqichli hisob-kitoblarni talab qiladi, bu esa hisoblash jarayonini qiyinlashtirishi va ko'p vaqtni talab qilishi mumkin. Kardano usuli asosan kubik tenglamalarni yechish uchun mo'ljallangan. Boshqa yuqori darajali tenglamalar uchun ushbu usulni qo'llash qiyin. Ba'zi hollarda, Kardano usuli ma'lum bir tenglama uchun aniq yechimlar bera olmaydi yoki murakkab sonlar orqali yechim topilsa, bu foydalanuvchiga tushunarsiz bo'lishi mumkin. Murakkab formulalar va ko'p bosqichli jarayonlar tufayli hisoblash xatolari yuzaga kelishi mumkin. Bunday xatolar natijalarni noto'g'ri ko'rsatishi yoki yechimlarni yanada murakkablashtirishi mumkin.

Ferrari usuli. Ferrari usuli yuqori darajali tenglamalarni, xususan, to‘rtinchi darajali yoki kvadratik tenglamalarni yechish uchun ishlatiladigan maxsus matematik metod hisoblanadi. Ushbu usul XVI asrda italiyalik matematik Lodoviko Ferrari tomonidan ishlab chiqarilgan.

Ferrari usuli, matematikada ko’phadlar va tenglamalarni yechishda qo'llaniladigan samarali usul sifatida ma'lum. Ferrari usuli bir nechta qadamda muammolarni yechishga imkon beradi, bu esa murakkab matematik masalalarni tezda hal qilish imkoniyatini beradi, ko’phadlar nazariyasi va algebraik geometriya bilan bog'liq ko'plab bo’limlarda o'rganiladi. Ferrari usuli yuqori darajali ko’phadlar va tenglamalarni yechishda qo'llash mumkin, bu esa uning qamrovini kengaytiradi.

Ferrari usulining aniq formulalari va bosqichlari tufayli yechimlarni topish jarayonida hisob-kitob xatolarini kamaytiradi.

Ferrari usuli to‘rtinchi darajali tenglamani quyidagi umumiy shaklda yechishga qaratilgan:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad (2)$$

Bu usulni quyidagi misol orqali tushuntirishga harakat qilamiz:

$$x^4-2x^3-2x^2+12x-24=0 \qquad (3)$$

Ushbu tenglamadan $x^4-2x^3=2x^2-12x+24$ (4) tenglikni hosil qilib ikkala tomoniga $\frac{b^2x^2}{4}$ ni ya’ni x^2 ni qo‘shamiz va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left(x^2-x\right)^2=3x^2-12x+24 \qquad (5)$$

(5) tenglamaning ikkala tomoniga $\left(x^2+\frac{bx}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}$ ni qo‘shsak,

$\left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-x\right)y+\frac{y^2}{4}=3x^2-12x+24+\left(x^2-x\right)y+\frac{y^2}{4}$ (6) hosil bo’ladi.

(6) ning chap tomonida to’la kvadrat hosil bo’ldi. O‘ng tomonidagi uchhad esa y parametrga bog’liq. (6) da y parametrni shunday tanlab olamizki, natijada (6) ning o‘ng tomoni to‘la kvadrat bo‘lsin. $Ax^2+Bx+C=0$ uchhad to‘la kvadrat bo‘lishi uchun esa $B^2-4AC=0$ bo‘lishi yetarli.

(6) soddalashtirsak $\left(x^2-x+\frac{y}{2}\right)^2=(3+y)x^2-(12+y)x+24+\frac{y^2}{4}$ (7) hosil bo‘ladi.

(7) ning o‘ng tomonini to‘la kvadratga keltiramiz.

$$(12+y)^2-4(3+y)\left(24+\frac{y^2}{4}\right)=0$$

va bundan, $y=-2$ ekanligi kelib chiqadi. y ni (7) ga olib borib qo‘ysak,

$$\left(x^2-x-1\right)^2=(x-5)^2 \text{ bo‘ladi.}$$

1. $$\begin{aligned} &x^2-x-1=x-5\\ &x^2-2x+4=0\\ &D=4-16=-12\\ &x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=1\pm\sqrt{3}i \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &x^2-x-1=-x+5\\ &x^2-6=0\\ &x_{3,4}=\pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

Xulosa o'rnida shuni aytish mumkinki, maqolada yuqori darajali tenglamalarni yechishda qo'llaniladigan Gorner sxemasi, Kardano usuli va Ferrari usullari batafsil yoritilgan. Gorner usuli ko'phadlarni bo'lishni soddalashtirish va idizlarni topishda qo'llansa, Kardano usuli uchinchi darajali tenglamalarni yechish uchun qo'llaniladi. Ferrari usuli esa to'rtinchi darajali tenglamalarni to'la kvadratga keltirib, yechim topishni o'z ichiga oladi. Ushbu usullar murakkab tenglamalarni samarali yechishga imkon berib, matematik masalalarni tushunishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Adabiyotlar:

1. Karimov I., Sobirov O. (2015). Algebra va analiz asoslari. Toshkent: O'zbekiston Milliy Ensiklopediyasi nashriyoti.
2. Tursunov B., Jo'rayev R. (2018). Matematik analiz va algebraik tenglamalar nazariyasi. Toshkent: Fan va texnologiya nashriyoti.
3. Saydaliyeva, L. M. (2023). Formation of medical geographical environment in Fergana region. Ethiopian International Journal of Multidisciplinary Research, 10(11), 366-369.
4. Saydalieva, L. M. (2024). Development Of Logical Thinking of Primary School Students. Pedagogical Cluster-Journal of Pedagogical Developments, 2(2), 319-323.
5. Muxamedova, G. R., & Taymanova, E. L. (2024). Algebra va sonlar nazariyasini o 'qitishda sun'iy intellekt imkoniyatlaridan foydalanish. Science and innovation, 3(Special Issue 18), 659-664.
6. Lutfullayevna, T. E. (2024). Algebra va sonlar nazariyasi va matematik analiz fanlarida talabalarning mustaqil ta'lim olish samaradorligini oshirishda math. Df dasturi imkoniyatlaridan foydalanish. Science and innovation, 3(Special Issue 32), 396-401.
7. Taymanova, E. (2023). Solvable extensions of the Quiasi-filiform LeLbniz Algebra L. Zamonaviy matematika, 1(1), 316-317.
8. Taymanova, E. (2023). Derivation of Heisenberg Leibniz Algebras. Operator Algebras, 1(1), 75-76.
9. Taymanova, E. (2022). Matritsalar va ularning tatbiqlariga doir masalalar. Fizika Matematika va Informatika, 1(2), 36-45.
10. Taymanova, E. (2022). Li va Leybnits algebralari haqida. Zamonaviy fizika, 1(1), 367-369.